EDHEC 2016

Voie E

Exercice 1 (Enoncé)

On désigne par id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2 .
2. a) Déterminer la seule valeur propre de A (donc aussi de f).
   b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
3. Déterminer une base (U_1, U_2) de l'unique sous-espace propre de A. Dans la suite, on note u_1 et u_2 les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les colonnes des coordonnées dans la base canonique sont respectivement U_1 et U_2.
4. a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.
   c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.
5. a) Expliquer pourquoi l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n2^{n-1}A - (n-1)\, 2^n I$$

   b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.
   c) Vérifier que la formule trouvée à la question 5a reste valable pour $n = -1$.