EML 2015

Filière ECE

Exercice 3 (Enoncé)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E et on note 0_E le vecteur nul de E.
On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E. On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta \quad \text{et} \quad f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où f^2 désigne l'endomorphisme $f \circ f$ de E. Enfin on note M la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$.

1. a) Montrer que f n'est pas bijectif.

   b) En déduire qu'il existe v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Montrer que : $\text{Sp}(M) = \{0\}$.

3. Est-ce que M est diagonalisable ?

4. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note alors $v_3 = f(v_2)$.

5. Montrer que : $f(v_3) = -v_2$.

6. a) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

   b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}'$.

   On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   ainsi que le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C), c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \text{Vect}(A, B, C) = \{aA + bB + cC, \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

7. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

8. Montrer que : $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \ CM = MC\} = \mathcal{F}$.

9. a) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(aA + bB + cC)^2$.

   b) En déduire une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

10. On note $g = f^2 - i$. Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i.