EML 2014

Voie S

Problème 2 (Enoncé)

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on note V_i la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i-ième ligne qui est égal à 1. On admet que la famille $(V_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j} = V_i\,{}^tV_j$.
Ainsi, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ est la matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui est égal à 1. On admet que la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout λ de $\mathbb{R}$, $A \neq \lambda I_n$.
On considère l'application Φ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \Phi_A(M) = AM - MA$$

Partie I : Quelques généralités

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\Phi_A(I_n)$. L'endomorphisme Φ_A est-il injectif ? surjectif ?

Partie II : Étude d'un cas particulier

On suppose, dans cette partie seulement, que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner les valeurs propres de A. On note $\mathcal{B}$ la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée des quatre matrices suivantes :

$$E_{1,1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right),\quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Écrire la matrice de Φ_A dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer le rang de cette matrice.
5. Déterminer les valeurs propres de Φ_A et montrer que Φ_A est diagonalisable.

Partie III : Étude du cas où A est diagonalisable

On suppose, dans cette partie seulement, que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Montrer que ${}^tA$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.
7. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. de ${}^tA$).
   Montrer que $X\,{}^tY$ est un vecteur propre de Φ_A.
8. Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   On note $\mathcal{F}$ la famille $\mathcal{F} = \left(X_i\,{}^tY_j\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$
   Montrer que, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $V_i\,{}^tV_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{F}$, et en déduire que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
9. Établir que Φ_A est diagonalisable.
10. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Φ_A est l'ensemble des différences $\lambda - \mu$ lorsque λ et μ décrivent les valeurs propres de A.

Partie IV : Étude d'un sous-espace propre de Φ_A associé à une valeur propre non nulle

Soit λ une valeur propre non nulle de Φ_A et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé ; on a alors :

$$\Phi_A(T) = \lambda T \quad \text{et} \quad T \neq 0$$

11. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \Phi_A(T^k) = \lambda k\, T^k$$

12. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un entier q de $\mathbb{N}$ tel que : $T^q = 0$ et $q \leqslant n^2$.
    On note p l'entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $T^p = 0$ et $T^{p-1} \neq 0$.
13. Justifier qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $T^{p-1}X \neq 0$.
    Montrer que la famille $(X, TX, \cdots, T^{p-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et en déduire : $p \leqslant n$

Partie V : Étude du cas où A est symétrique

On suppose. dans cette partie seulement, que la matrice A est symétrique ; il existe donc une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $P^{-1}AP$ est diagonale. On note C_1, $C_2, \ldots, C_n$ les colonnes de P.
Pour toutes matrices $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $N = (n_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$(M \mid N) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{i,j} n_{i,j}$$

14. Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
15. Montrer : $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ (M \mid N) = \left(M^t N \mid I_n\right)$.
16. Pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$ calculer ${}^tC_iC_j$.
17. Pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, déterminer les coefficients diagonaux de la matrice $C_i\,{}^tC_j$ et en déduire la valeur de $\left(C_i\,{}^tC_j \mid I_n\right)$.
18. Pour tout (i, j, k, ℓ) de $[\![1, n]\!]^4$, calculer $\left(C_i\,{}^tC_j \mid C_k\,{}^tC_\ell\right)$.
19. On considère la famille $\mathcal{G} = \left(C_i\,{}^tC_j\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
    Montrer que $\mathcal{G}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{G}$ est constituée de vecteurs propres de Φ_A.