ESSEC 2013

Voie E

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine.
On considère pour cela une variable aléatoire N et une suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires et identiquement distribuées. On suppose par ailleurs que les variables aléatoires $N, U_1, \ldots, U_k, \ldots$ sont toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et mutuellement indépendantes.
On note alors X_0 la variable aléatoire constante égale à 0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire définie par :

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

On étudie le modèle suivant :

- N est la variable aléatoire égale au nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée,
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le coût du $k^{ème}$ sinistre (s'il a lieu) est égal à la valeur prise par la variable aléatoire U_k.
- la charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est la variable aléatoire X telle que, si N prend la valeur n, X prend la valeur de X_n, c'est-à-dire :

$$X = \sum_{k=1}^{N} U_k$$

  On dit que X suit une loi composée.

Pour tout entier naturel j, on pose :

$$p_j = \mathbb{P}(N = j), \quad q_j = \mathbb{P}(U_1 = j) \quad \text{et} \quad r_j = \mathbb{P}(X = j)$$

Partie I -- Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, quelle est la loi de X_n ?
2. Pour tout entier naturel j, établir :

$$r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = j)\, p_n$$

3. Dans cette question 3 uniquement, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres $m \in \mathbb{N}$ et $\pi \in]0, 1[$. Soit j un entier naturel.

a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.

b) Établir que, si $j \in [\![0, m]\!]$:

$$r_j = \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$$

c) Vérifier que, pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m$:

$$\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$$

d) En déduire que, pour tout $j \in [\![0, m]\!]$:

$$r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \left[(1-p)\pi\right]^\ell (1-\pi)^{m-j-l}$$

e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et π.

4. On suppose, dans cette question 4 uniquement, que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a) Compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire X :

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
def X(Lambda,p):
    N=rd.poisson(.....)
    if N==0:
        return .......
    else:
        U=rd.binomial(1,p,N)
        return .......
```

b) Montrer que, pour tout entier naturel j :

$$r_j = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \left[\lambda(1-p)\right]^{n-j}$$

c) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ.

Partie II -- La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout réel y et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (y-i) \quad \text{et} \quad \binom{y}{0} = 1$$

5. Écrire une fonction d'en-tête `def Binom(y,k)` en langage `Python` dont l'exécution renvoie la valeur de $\binom{y}{k}$.

6. Soit c un réel strictement positif,et x un réel appartenant à $[0, 1[$.

a) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} \,\mathrm{d}t$$

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} I_n$$

b) Vérifier que pour tout $t \in [0, x]$:

$$0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x$$

puis en déduire l'encadrement :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$$

c) (i) Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{k}\right)$.

(ii) Prouver que, pour tout réel t positif : $\ln(1+t) \leqslant t$.

(iii) Établir que :

$$\forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$$

puis en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$$

(iv) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left[\binom{c+n}{n}\right] \leqslant c\,[1+\ln(n)]$$

En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$$

d) En conclure que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

7. Soit $p \in]0,1[$ et r un réel strictement positif. On considère la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r$$

Montrer que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle loi binomiale négative de paramètres r et p.

8. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p. Que peut-on dire de la loi de $Y+1$?

9. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres $r > 0$ et $p \in]0,1[$.

a) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$k\binom{r+k-1}{k} = r\binom{r+k-1}{k-1}$$

b) Montrer que Z admet une espérance et que : $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p}$.

c) En commençant par s'intéresser à l'espérance de $Z(Z-1)$, montrer que Z admet une variance et que :

$$\mathbb{V}(Z) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Partie III -- Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème et on rappelle que la loi de la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ est donnée par $p_k = P(N = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer, c'est-à-dire qu'il existe deux réels a et b, avec $a < 1$ et $a + b > 0$, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

10. a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right)$$

b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$. Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b.

c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

(i) Montrer qu'il existe un unique entier naturel r, tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \begin{cases} p_k = 0 & \text{si } k > r \\ p_k \neq 0 & \text{si } k \leqslant r \end{cases}$$

On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.

(ii) Montrer que : $b = -a(r + 1)$.

(iii) Établir que :

$$\forall k \in [\![0, r]\!],\ p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$$

En déduire que : $p_0 = \dfrac{1}{(1 - a)^r}$.

(iv) Conclure que N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres en fonction de a et b.

d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

(i) Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $p_k = \dbinom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k p_0$.

(ii) En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b.

11. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et, une variance, et qu'elles sont données par :

$$\mathbb{E}(N) = \frac{a + b}{1 - a} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N) = \frac{a + b}{(1 - a)^2}$$

Partie IV -- L'algorithme de Panjer

On reprend les notations de l'introduction du sujet et de la partie III. Si A est un événement de probabilité non nulle et Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note, si elle existe, $\mathbb{E}_A(Y)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant A, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}_A(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, \mathbb{P}_A(Y = k)$$

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ en fonction de q_0 puis établir :

$$r_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} {q_0}^n p_n$$

13. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{E}_{(X_n=j)}(X_n)$? En déduire : $\mathbb{E}_{(X_n=j)}(U_1) = \dfrac{j}{n}$.

b) Établir :

$$r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = j)\left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right)\mathbb{P}(X_n = j)\, p_{n-1}$$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right)\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right)\mathbb{P}(U_1 = i)\ \mathbb{P}(X_{n-1} = j - i)$$

d) En déduire alors :

$$r_j = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i\, r_{j-i}$$

puis :

$$r_j = \frac{1}{1 - aq_0}\sum_{i=1}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i\, r_{j-i}$$

Cette formule permet de calculer récursivement les nombres r_j et ainsi de déterminer la loi de X.

14. Des exemples d'application.

a) Dans cette question, les variables U_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

(i) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$: $r_j = \dfrac{p}{1 - a + ap}\left(a + \dfrac{b}{j}\right) r_{j-1}$.
En déduire que X suit une loi de Panjer.

(ii) Retrouver les résultats des questions 3 et 4 de la partie I.

b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$. On rappelle que cela entraine que N suit la loi de Poisson de paramètre b. Soit p un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

(i) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que la famille de nombre $(q_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie par $q_i = \alpha\frac{p^i}{i}$ définisse la loi de probabilité d'un variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On pose $q_0 = 0$ et on suppose que les variables U_k suivent cette loi de probabilité.

(ii) Montrer que pour tout entier $j \geqslant 1$, on a : $r_j = \dfrac{b\alpha}{j}\displaystyle\sum_{i=1}^{j} p^i r_{j-i}$.

(iii) En utilisant un changement d'indice, établir pour tout $j \geqslant 2$:

$$r_j = \left(p + \frac{p(b\alpha - 1)}{j}\right) r_{j-1}$$

puis montrer que cette égalité est encore vérifiée pour $j = 1$.

(iv) Conclure que X suit une loi binomiale négative dont on exprimera les paramètres en fonction de b, α et p.