EML

Filière ECS

(Enoncé)

Partie I. Étude d'une fonction f définie par une intégrale

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   On note alors $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

   En déduire que :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

   En déduire :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leqslant \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   En déduire que : $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Partie II. Une autre expression intégrale de f

A – Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'intégrale

5. Soit $(x,h) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ tel que : $h > -\dfrac{x}{2}$.

   a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

   b) Établir :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \left| \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| \leqslant \frac{2\,|h|}{x^3}.$$

   c) En déduire :

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{2\,|h|}{x^3}.$$

6. Prouver que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

7. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0,1] \times [1,+\infty[$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{e}^{-A}}{x+A} + \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

8. En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).$$

9. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x).$$

B – Intervention d'une fonction auxiliaire g

On note $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x).$$

10. Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}.$$

11. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ converge et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Montrer alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

12. Montrer que :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}.$$

13. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$?