EML 2013 – Voie E – Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
   a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.
   b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Partie II

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

1. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2. En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.
2. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
   a) Déterminer $\mathbb{P}(Z_k = 1)$ et déterminer $\mathbb{P}(Z_k = k)$.
   b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}(Z_{k+1} = \ell) = \dfrac{\ell}{n}\,\mathbb{P}(Z_k = \ell) + \dfrac{n - \ell + 1}{}n\mathbb{P}(Z_k = \ell - 1)$.
   c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\,\mathbb{E}(Z_k) + 1$.
3. a) Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.
   b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$. Ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4. Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

1. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}(Z_k = 1)$. Déterminer $\mathbb{P}(Z_k \geqslant 5)$.
2. Montrer : $\mathbb{P}(Z_k = 2) = 6\,\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.
3. On note, pour tout i de $[\![1, 4]\!]$, A_i l'événement : « la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».
   a) Montrer : $\mathbb{P}(Z_k \leqslant 3) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.
   b) Calculer, $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.
   c) En déduire : $\mathbb{P}(Z_k \leqslant 3)$, puis $\mathbb{P}(Z_k = 3)$ et $\mathbb{P}(Z_k = 4)$.