EDHEC

Filière ECS

(Énoncé)

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, et suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ, où λ désigne un réel strictement positif. On se propose de déterminer un équivalent de la probabilité $\mathbb{P}(X = Y)$ lorsque λ est au voisinage de $+\infty$.

Partie 1

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n \, \mathrm{d}t$.

1. a) Calculer u_0 et u_1.
   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
2. a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.
   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
   c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)u_{n+1}u_n = \dfrac{\pi}{2}$.
   d) En déduire la valeur de u_{2n+1}.
3. a) Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n}$.
   b) En déduire, en utilisant les variations de (u_n), que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
   c) Montrer enfin que l'on a : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Partie 2

1. Établir, pour tout réel x, la convergence de l'intégrale $I(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t$.

   Dans la suite de cette partie, x désigne un réel strictement positif.
2. a) Montrer qu'il existe une constante M telle que : $0 \leqslant \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t \leqslant M$.
   b) Montrer que : $\forall u \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $1 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-u}} \leqslant 1 + u$.
3. a) En se référant à une loi normale, donner les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.
   b) Utiliser le changement de variable $u = \sqrt{tx}$ pour montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.
   c) Montrer de la même façon que : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-tx} \sqrt{t} \, \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}$.

4. a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 + t$, que :

$$\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\,\mathrm{d}u$$

   b) Utiliser le résultat de la question 2b) pour en déduire que : $I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{x}\sqrt{2\pi x}$.

Partie 3

1. Exprimer comme somme d'une série la probabilité $\mathbb{P}(X = Y)$.
2. a) On désigne par t un réel de $[-1, 1]$ et par x un réel strictement positif. Montrer que, pour tout u compris entre 0 et $-tx$, on a : $\mathrm{e}^{u} \leqslant \mathrm{e}^{x}$.
   Écrire ensuite l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ pour la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{u}$ entre 0 et $-tx$.
   b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = u_k$.
   c) Déduire des deux questions précédentes que : $\displaystyle\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \right| \leqslant \frac{2x^{2n+1}e^{x}}{\pi(2n+1)!} u_{2n+1}$.
   d) Montrer enfin que : $\forall x > 0,\ I(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$.
3. Établir que : $\mathbb{P}(X = Y) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}$.