



EDHEC 2013

Filière ECE

Problème (Énoncé)

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$

a) Calculer $\int_0^1 f(x) dx$. En déduire sans calcul $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

- b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et admettant f comme densité.

2. a) Établir l'existence de l'espérance de X , puis donner sa valeur.
 b) Établir l'existence de la variance de X , puis donner sa valeur.
3. Montrer que la fonction de répartition de X , notée F_X , est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On note F_Y sa fonction de répartition.

4. a) Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.
 b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X .
 c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1] \end{cases}$$

- d) Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.

5. On considère deux variables aléatoires U et V , elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On pose $I = \inf(U, V)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω , on a $I(\omega) = \min(U(\omega), V(\omega))$.

On admet que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on rappelle que, pour tout réel x , on a $\mathbb{P}(I > x) = \mathbb{P}((U > x) \cap (V > x))$.

Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de I .

- a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x .
 b) En déduire que I suit la même loi que Y .

6. On considère plus généralement n variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n , $n \geq 2$, toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On pose $I_n = \inf(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Déterminer la fonction de répartition de I_n et montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

7. Simulation informatique de la loi de Y .

Compléter fonction Python suivante pour qu'elle simule la loi de Y .

```
import numpy.random as rd
def y():
    u=.....
    v=.....
    if u<v:
        return .....
    else:
        return .....
```