HEC 2012

Voie E

Exercice (Enoncé)

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ on pose $g^0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $g^k = g \circ g^{k-1}$.
Soit m un réel donné strictement positif et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

1. a) Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et l'image $\mathrm{Im}(f)$ de l'endomorphisme f.
   b) La matrice M est-elle inversible ?
2. a) Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire de I et de M.
   b) Déterminer un polynôme annulateur non nul de la matrice M.
   c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. À l'aide des résultats de la question 2c, indiquer une méthode, sans faire les calculs, qui permettrait d'obtenir pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de n .
4. On pose :
$$p = \frac{1}{3}(f + \mathrm{Id}) \quad \text{et} \quad q = -\frac{1}{3}(f - 2\mathrm{Id})$$
   a) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, p^n et q^n.
   b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression de f^n en fonction de p et q.
   c) Déterminer deux suites réelles telles que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = a_n I + b_n M$$
   d) La formule précédente reste-t-elle valable si n appartient à $\mathbb{Z}$?