HEC

Filière B/L

(Enoncé)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, ou p est un réel de $]0,1[$. On pose : $q = 1-p$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendante des variables aléatoires X_n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $Y(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$, et on admet que $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

On rappelle que pour tout couple d'entiers naturels (n,k), on a : $\displaystyle\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. De plus, on pourra utiliser, sans justification, la formule (1) suivante :

$$\text{pour tout couple } (r,s) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } r \leqslant s,\ \sum_{j=r}^{s} \binom{j}{k} = \binom{s+1}{r+1}$$

1. Montrer que la loi de S_2 est donnée par $S_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$, et pour tout $k \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}(S_2 = k) = (k-1)\, p^2 q^{k-2}$$

2. Déterminer pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la loi de X_1 conditionellement à l'événement $[S_2 = n]$.

3. a) Déterminer $S_n(\Omega)$.

   b) En utilisant la formule (1) et à l'aide d'une démonstration par récurrence sur n, montrer que :

$$\text{pour tout } k \in S_n(\Omega),\ \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

4. a) En utilisant le fait que S_{n-1} est une variable aléatoire, établir l'égalité :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-2}{n-2} q^{k-n} = \frac{1}{p^{n-1}}$$

   b) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout entier $k \geqslant n$, on a :

$$\frac{n-1}{k-1} \binom{k-1}{n-1} = \binom{k-2}{n-2}$$

   c) Soit R_n la variable aléatoire définie par : $R_n = \dfrac{n-1}{S_n - 1}$. Montrer que l'espérance de R_n est égale à p.

5. a) Déterminer $Y(\Omega)$.

   b) Pour tout couple $(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\mathbb{P}([Y = k] \cap [N = n]) = \mathbb{P}(S_n = k) \times \mathbb{P}(N = n)$$

c) Donner pour tout couple $(k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $k < n$, la valeur de $\mathbb{P}([Y = k] \cap [N = n])$.

d) Déduire des questions précédentes que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}(S_n = k) \times \mathbb{P}(N = n)$$

6. On suppose dans cette question que N suit la loi géométrique de paramètre p. Montrer que Y suit la loi géométrique de paramètre p^2.
7. On suppose réciproquement que Y suit la loi géométrique de paramètre p^2.

a) Montrer que $\mathbb{P}(N = 1) = p$.

b) Montrer également que $\mathbb{P}(N = 2) = pq$.

c) À l'aide d'une démonstration par récurrence, montrer que N suit la loi géométrique de paramètre p.