EML

Filière ECE

(Enoncé)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \, \mathrm{d}x$ est convergente.

2. a) Rappeler une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance nulle et de variance a^2.
   En déduire : $I_0 = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

   b) Calculer la dérivée de l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.
   En déduire : $I_1 = a^2$.

3. a) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\int_0^t x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \, \mathrm{d}x = -a^2 \, t^{n-1} \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1) \, a^2 \int_0^t x^{n-2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \, \mathrm{d}x$$

   b) En déduire, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $I_n = (n-1) \, a^2 I_{n-2}$.

   c) Calculer I_2 et I_3.
   On considère l'application $g_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{a^2} \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. Montrer que g_a est une densité. On considère une variable aléatoire X admettant g_a comme densité.

5. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

6. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et que $\mathbb{E}(X) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

7. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $\mathbb{V}(X)$ et calculer $\mathbb{V}(X)$.

8. a) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$. Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(U)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.

   b) En déduire un programme en langage `Python` simulant la variable aléatoire X, le réel a strictement positif étant entré par l'utilisateur.
   Soit un entier n tel que $n \geqslant 2$.
   On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant toutes la même loi que la variable aléatoire X.

9. On considère la variable aléatoire $A_n = \dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

   a) Montrer que la variable aléatoire A_n est un estimateur de a et calculer son espérance.

   b) Déterminer la variance de l'estimateur A_n.
   On définit la variable aléatoire $M_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. On a ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; [M_n > t] = [X_1 > t] \cap [X_2 > t] \cap \cdots \cap [X_n > t]$$

10. a) Montrer, pour tout $t \in [0, +\infty[$: $\mathbb{P}(M_n > t) = \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$.
    b) En déduire la fonction de répartition de M_n.
    c) Montrer que M_n est une variable aléatoire à densité, admettant g_b comme densité avec $b = \frac{a}{\sqrt{n}}$.
    d) Montrer que la variable aléatoire M_n admet une espérance $\mathbb{E}(M_n)$ et une variance $\mathbb{V}(M_n)$. Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{V}(M_n)$.
11. a) En déduire un estimateur B_n de a, de la forme $\lambda_n M_n$ avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$, et dont l'espérance est égale à a.
    b) Déterminer la variance de l'estimateur B_n.