EDHEC

Filière ECS

(Enoncé)

Toutes les variables aléatoires intervenant dans ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On considère aussi, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire M_n définie par :

$$M_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

c'est à dire que, pour tout ω de Ω, on a $M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.
On cherche alors des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes strictement positifs, telles que la suite $\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire non constante.
La fonction exponentielle sera indifféremment notée $x \mapsto \mathrm{e}^x$ ou exp.

Partie 1 - La loi exponentielle

On suppose dans cette partie que la loi commune des X_k est la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{e}^{-x}\exp(-\mathrm{e}^{-x})$.

   a) Montrer que g est une densité de probabilité. On note G une variable aléatoire admettant g comme densité.

   b) Déterminer la fonction de répartition, notée F_G, de la variable G.

2. a) Donner, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable M_n.

   b) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $U_n = \lambda M_n - \ln(n)$. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable dont on précisera la loi.

Partie 2 - La loi normale

On suppose dans cette partie que la loi commune des X_k est une loi normale centrée réduite. Soit φ la densité usuelle de X_1.

3. a) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ est convergente et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\mathbb{P}(X_1 > x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

   b) En déduire que pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\mathbb{P}(X_1 > x)}{x^2} \leqslant \mathbb{P}(X_1 > x) \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}$$

   puis que :

$$\mathbb{P}(X_1 > x) \leqslant \frac{\varphi(x)}{x} \leqslant \mathbb{P}(X_1 > x)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

4. Soit c un réel strictement positif. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{c}{n}$ admet sur $]0, +\infty[$ une unique solution que l'on notera x_n.
5. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.
6. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$x_n^2 + 2\ln(x_n) = 2\ln(n) - \ln(2c^2\pi)$$

7. En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation de la question 6, montrer que :

$$x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\ln(n)}$$

En déduire que l'on peut écrire pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$x_n = \sqrt{2\ln(n)} + \varepsilon_1(n) \qquad \text{où } \lim_{n \to +\infty} \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}} = 0$$

8. a) En utilisant la question 6, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$2\left(\sqrt{2\ln(n)}\right)\varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}}\right) = -\ln(\ln(n)) - \ln(4\pi c^2)$$

b) En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation du (a), montrer que :

$$2\varepsilon_1(n)\sqrt{2\ln(n)} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\ln(\ln(n))$$

En déduire que :

$$\varepsilon_1(n) = -\frac{\ln(\ln(n))}{2\sqrt{2\ln(n)}} + \varepsilon_2(n) \qquad \text{où } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_2(n)\frac{2\sqrt{2\ln(n)}}{\sqrt{\ln(\ln(n))}} = 0$$

On admet alors, qu'en poursuivant le développement asymptotique, l'on peut écrire pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$x_n = \sqrt{2\ln(n)} - \frac{\ln(\ln(n))}{2\sqrt{2\ln(n)}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln(n)}} - \frac{\ln(c)}{\sqrt{2\ln(n)}} + \varepsilon(n)$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon(n)\sqrt{2\ln(n)} = 0$.

9. On pose, pour tout entier $n \geqslant 2$: $a_n = \frac{1}{\sqrt{2\ln(n)}}$ et $b_n = \sqrt{2\ln(n)} - \frac{\ln(\ln(n))}{2\sqrt{2\ln(n)}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln(n)}}$.
Montrer à l'aide des questions précédentes que, pour tout réel x et pour tout entier $n \geqslant 2$, en posant $c = \mathrm{e}^{-x}$ on a :

a) $a_n x + b_n = x_n - \varepsilon(n)$

b) $\dfrac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$

c) En déduire, en utilisant la question 3b, que :

$$\frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathbb{P}(X_1 > a_n x + b_n)$$

puis que la suite $\left(\dfrac{M_n - b_n}{a_n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers la variable G (la variable G est définie dans la partie 1).