EDHEC 2011 • Problème

Voie E

Problème

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et indépendantes. On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition. On suppose par ailleurs Y prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ et que sa loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}$$

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x :

$$\mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\,\mathbb{P}(Y = 1) \text{ et } \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [Y = -1]) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\,\mathbb{P}(Y = -1)$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est, elle aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ $(a < b)$ et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
2. En utilisant le système complet d'événements $([Y = 1], [Y = -1])$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \frac{1}{2}\left[F_X(x) - F_X(-x) + 1\right]$$

3. On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite. Reconnaître la loi de Z.
4. On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0, 1]$.
   a) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x.
   b) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x, puis reconnaitre la loi de Z.
5. Dans toute la suite, on suppose que la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1.
   a) Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.
   c) Établir alors que la fonction $f_Z : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-|x|}}{2}$ est une densité de Z.
6. a) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   b) Établir l'existence et déterminer la valeur de $\mathbb{E}(Z)$.
7. a) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

8. a) Déterminer $\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ et comparer avec $\mathbb{E}(Z)$. Ce résultat était-il prévisible ?

   b) Exprimer Z^2 en fonction de X, puis en déduire de nouveau la variance de Z.

9. Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0,1[$. On pose :

$$Q = -\ln(1-V) \quad \text{et} \quad R = 2U - 1$$

On admet que Q et R sont des variables aléatoires.

a) Déterminer la fonction de répartition de Q puis en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q.

b) Déterminer la loi de R.

c) Écrire un script Python affichant une simulation de la variable aléatoire Z.