EDHEC 2010

Filière ECE

Exercice 1 (Enoncé)

On considère la fonction f définie, pour tout couple (x, y) de l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$, par :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ f(x, y) = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

1. Montrer que, pour tout couple (x, y) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a :

$$f(x, y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \qquad \text{et} \qquad f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy}$$

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
3. Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.
4. Déterminer les dérivées partielles secondes de f. Celles-ci permettent-elles de conclure quant à l'existence d'un extremum local de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$?
5. a) Comparer les réels $(x + y)^2$ et $4xy$.
   b) En déduire que f admet sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.
6. Soit g la fonction définie pour tout (x, y) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$, par :

$$g(x, y) = 2 \ln(x + y) - \ln x - \ln y.$$

   Montrer que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ g(x, y) \geqslant 2 \ln(2)$$