ECRICOME

Filière ECE

(Enoncé)

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que la fonction polynômiale Q qui à tout réel x associe le réel :

$$Q(x) = x^3 - (a+2)\,x^2 + (2a+1)\,x - a$$

I. Recherche des valeurs propres de M_a

1. Montrer que le réel λ est une valeur propre de M_a si et seulement si λ est racine du polynôme Q.
2. Vérifier que le réel $\lambda = 1$ est racine de Q.
3. En déduire les racines de Q ainsi que leur nombre en fonction de a.
4. Lorsque $a = 1$, la matrice M_1 est-elle diagonalisable ?

II. Réduction de la matrice M_a

Dans toute la suite de l'exercice on suppose a différent de 1.
Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par :

$$\begin{cases} e'_1 = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

5. Prouver que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
   Expliciter la matrice de passage P_a de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
6. Montrer qu'il existe un réel α, que l'on déterminera, tel que $f_a(e'_1) = \alpha e'_1$.
7. Vérifier que le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs e'_2 et e'_3 est stable par f_a c'est-à-dire :
   $$f_a\,(F) \subset F$$
8. Donner l'expression de la matrice T_a de l'endomorphisme f_a dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$.
9. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
   $$T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   où, par convention, on pose $T_a^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

III. Étude d'une suite récurrente linéaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$$

10. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

11. Établir par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

12. Donner l'expression matricielle de la matrice inverse de P_2 puis exprimer u_n en fonction de n.
13. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?