ESCP

(Énoncé)

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de $[0,+\infty[$, par la relation : $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

1. a) Calculer, pour tout réel x positif, $f'(x)$.
   b) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   d) Dresser le tableau de variation de f.
   On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=1$ et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.
2. a) Calculer u_1 et u_2.
   b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $0<u_n\leqslant \dfrac{1}{n}$.
   c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n=\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}$.
   a) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de u_n.
   b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'encadrement suivant :
   $$2\leqslant v_n\leqslant 2+\frac{1}{n}$$
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$2(n+1)\leqslant \frac{1}{u_n}\leqslant 2(n+1)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$
5. a) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, comparer $\dfrac{1}{k}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.
   b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'inégalité suivante :
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant 1+\ln(n)$$
6. Utiliser les questions précédentes pour montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n=\frac{1}{2}$.