EML 2009

Filière ECS

(Enoncé)

Notations et définitions

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée O_n.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est nilpotente s'il existe un entier naturel non nul p tel que $M^p = \mathrm{O}_n$.
- Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de M. On note $\mathrm{SEP}(M, \lambda)$ le sous-espace propre de M associé à λ.
- On dit qu'une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive lorsqu'elle est symétrique et vérifie :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ \ {}^tXSX \geqslant 0$$

- Soient $A, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que R est une racine carrée de A lorsqu'elle vérifie $R^2 = A$.

Le but de ce problème est d'étudier la notion de racine carrée d'une matrices dans quelques cas particuliers.

Partie I. Deux exemples

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

   Calculer $(R_\theta)^2$ et en déduire que la matrice I_2 admet une infinité de racines carrées.

2. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

Partie II. Racines carrées d'une matrice de la forme $\mathrm{I}_n + N$ avec N nilpotente

3. Donner le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de $t \longmapsto \sqrt{1+t}$.
   On note $\sqrt{1+t} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \underset{t \to 0}{\mathrm{o}}(t^3)$ ce développement limité.

4. Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[x]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ 1 + x = \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)^2 + x^4\, Q(x)$$

5. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $N^4 = \mathrm{O}_n$. Déduire de la question précédente une racine carrée de $\mathrm{I}_n + N$.

Partie III. Racines carrées d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes

6. Soit f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On suppose deux plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

   a) Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g.

   b) En déduire que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.

c) Justifier que f est diagonalisable.
Montrer que, pour tout base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f, la matrice associée à g relativement à la base $\mathcal{B}$ est diagonale. En déduire que g est diagonalisable.

7. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles strictement positives et deux à deux distinctes.
   a) Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
   b) Donner un exemple de racine carrée de A. (On l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D.)
   c) Soit R une racine carrée de A. Vérifier que $AR = RA$.
   En déduire que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.
   d) Établir que A admet exactement 2^n racines carrées.

Partie IV. Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive.

8. Montrer que toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.
9. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}SP$ soit diagonale.
10. Déterminer une racine carrée de S qui soit symétrique positive (on l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D).
11. On veut montrer que S admet une unique racine carrée symétrique positive.
    Soit R une matrice symétrique positive telle que $R^2 = S$.
    a) Soit λ une valeur propre de R. Montrer que λ^2 est valeur propre de S et que les sous-espaces propres associés vérifient : $\mathrm{SEP}(R,\lambda) \subset \mathrm{SEP}(S,\lambda^2)$.
    On note p le nombre de valeurs propres deux à deux distinctes de R et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les p valeurs propres deux à deux distinctes de R.
    b) Justifier que : $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(R,\lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2)$.
    c) En déduire que : $\displaystyle n = \sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{SEP}(R,\lambda_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2)\right) \leqslant n$.
    d) Montrer que $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_p^2$ sont les seules valeurs propres de S et que
    $$\forall i \in \{1, \ldots, p\},\ \mathrm{SEP}(R,\lambda_i) = \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2).$$
    e) Montrer que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.
    f) En déduire que S admet une unique racine carrée symétrique positive.