ESCP

Filière ECS

(Énoncé)

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,, \ |a_i| > n - 1.$$

Soient alors $b_1, \ldots, b_n$ des réels fixés et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $AX = 0$. Montrer que : $X = 0$.

   b) En déduire que l'équation $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, admet une unique solution.

   Dans la suite, cette solution est notée $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

2. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = A - M.$$

   Montrer que :

$$Y = D^{-1}B - D^{-1}MY.$$

3. Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On définit la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ X_{p+1} = D^{-1}B - D^{-1}MX_p.$$

   On note alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ X_p = \begin{pmatrix} x_1^{(p)} \\ \cdots \\ x_n^{(p)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_p = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left| x_i^{(p)} - y_i \right|.$$

   a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, exprimer $X_{p+1} - Y$ en fonction de D, M, et $X_p - Y$.

   b) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ u_{p+1} \leqslant \frac{n-1}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i|} u_p.$$

   c) En déduire que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,, \ \lim_{p\to+\infty} x_i^{(p)} = y_i.$$