ESC Chambéry

Filière ECS

(Énoncé)

On pose pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale impropre appelée I_n.
2. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in N^*}$ est décroissante et converge vers une limite notée ℓ.
3. On pose pour tout réel $A>0$ et tout entier naturel n non nul : $I_n(A) = \displaystyle\int_0^{A} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$.

   Par une intégration par parties, montrer que $I_n(A) = \dfrac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\,[I_n(A) - I_{n+1}(A)]$.
4. Dans cette question on montre que la limite de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, notée ℓ, est nulle.
   a) À l'aide de la question 3, montrer que $\dfrac{J_n}{3n} = \dfrac{1}{3n\cdot 2^n} + (J_n - J_{n+1})$.

   b) Justifier que les séries de terme généraux respectifs $(J_n - J_{n+1})$ et $\dfrac{1}{3n\cdot 2^n}$ sont convergentes.

   En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{J_n}{3n}$.

   c) Soit β un réel non nul et (a_n) une suite équivalente à $\left(\dfrac{\beta}{3n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   Justifier que la série de terme général a_n diverge et en déduire par l'absurde que $\ell = 0$.
5. a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx \leqslant \frac{1}{3n-1}$.

   b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
6. a) Grâce à la question 3, montrer que pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n$.

   b) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $I_n = I_1 \cdot \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$.
7. On admet que $I_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Recopier et compléter le programme ci-dessous afin qu'il demande un entier n supérieur à 2 et calcule puis affiche la valeur de I_n trouvée à la question 6b :

```
import numpy as np
n=int(input("n="))
I=2*np.pi/(3*np.sqrt(3))
for k in range(1,n):
    ........
print(......)
```