EDHEC 2006

Filière ECS

Problème (Énoncé)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0). Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $\dfrac{k+1}{k+2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{k+2}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc : $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on pose : $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

Partie I. étude de la variable aléatoire $\mathbf{X_n}$

1. Vérifier que $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ puis donner la loi de X_1.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
3. a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k}{k+1}\,\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1)$$

   b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{k+1}\,u_{n-k}$$

   c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$$

   d) Retrouver ainsi les valeurs de u_0 et u_1 puis déterminer u_2 et u_3.
4. a) En remarquant que la relation obtenue dans la question 3a peut s'écrire sous la forme

$$(k+1)\,\mathbb{P}(X_n = k) = k\,\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1)$$

   montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_{n-1}) = u_n$$

   b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{E}(X_n)$ sous forme de somme mettant en jeu certains termes de la suite (u_n).

   c) Pour tout entier naturel n non nul, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j}$ et vérifier que :

$$u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$$

   Déduire de ces deux résultats que :

$$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}$$

   d) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$. Déterminer ensuite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Partie II. Étude du premier retour à l'origine

On note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ) et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On convient que T prend la valeur 0 si le mobile ne revient jamais en O.
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0, 0, 1, 2, 0, 0, 1$, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : $1, 2, 3, 0, 0, 1$, alors on a $T = 4$.

5. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.

   b) Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T = k) = \frac{1}{k\,(k+1)}$$

   c) Déterminer des constantes a et b telles que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

   En déduire que $\mathbb{P}(T = 0) = 0$, puis interpréter ce dernier résultat.

6. La variable T a-t-elle une espérance ?

Partie III. Informatique

7. Compléter les instructions manquantes pour que le programme `Python` suivant, dans lequel n est déclaré comme constante (ici $n = 100$), calcule et affiche $u_0, u_1, \ldots, u_n$, ainsi que l'espérance de X_n (stockée dans `E`) :

```
import numpy as np
n=100
u=np.zeros(n)
u[0]=.....
for k in range(.........):
    for j in range(.....):
        u[k]+=.........
E=np.sum(...............)
print(u,E)
```

8. a) Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expériene et affiche la valeur prise par T.
   On rappelle que, si k est un entier naturel non nul, l'instruction `rd.randint(k)` renvoie aléatoirement un entier compris entre 0 et $k - 1$.

```
import numpy.random as rd
T=.....
while rd.randint(.....)!=.....:
    T=T+1
print(T)
```

   b) Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle « `while` » est fini ?