HEC • Maths 3

Filière ECE

Exercice (Enoncé)

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on assimile une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme $X \mapsto MX$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ce qui nous permet notamment de noter :

$$\mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ MX = 0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(M) = \{MX,\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$$

L'objet de l'exercice est l'étude des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation $(*)$: $A^2 = 4\,\mathrm{I}_n$.

A. Étude du cas $n = 2$

Dans cette partie uniquement, on suppose que

$$A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit U le vecteur de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ défini par $U = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A vérifie l'équation $(*)$.
2. Déterminer le noyau et l'image de A.
3. On note $F = \mathrm{Ker}(A - 2\,\mathrm{I}_2)$ et $G = \mathrm{Im}(A - 2\,\mathrm{I}_2)$.
   a) Montrer que G est engendré par le vecteur U. En déduire la dimension de F et donner une base de F.
   b) Vérifier que : $G = \mathrm{Ker}(A + 2\,\mathrm{I}_2)$.
4. Prouver alors que A est diagonalisable, préciser les valeurs propres de A et donner une matrice P de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

B. Étude du cas général

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation $(*)$.

1. a) Justifier que A est un inversible et préciser A^{-1}.
   b) Déterminer les valeurs propres possibles de A.
   c) Vérifier que $2\,\mathrm{I}_n$ et $-2\,\mathrm{I}_n$ satisfont l'équation $(*)$.
   On suppose dans la suite de l'exercice que $A \neq 2\,\mathrm{I}_n$ et $A \neq -2\,\mathrm{I}_n$ et on note $F = \mathrm{Ker}(A - 2\,\mathrm{I}_n)$ et $G = \mathrm{Im}(A - 2\,\mathrm{I}_n)$.

2. Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que $AX - 2X$ appartient à $\mathrm{Ker}(A + 2\,\mathrm{I}_n)$ et que $AX + 2X$ appartient à F.
   b) En déduire que $G \subset \mathrm{Ker}(A + 2\,\mathrm{I}_n)$ et que $\mathrm{Im}(A + 2\,\mathrm{I_n}) \subset F$.
   c) Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de A.
3. Soit X un vecteur de $\mathrm{Ker}(A + 2\,\mathrm{I}_n)$.
   a) Exprimer $(A - 2\,\mathrm{I}_n)\,X$ en fonction de X uniquement.
   b) En déduire que X appartient à G, puis que $G = \mathrm{Ker}(A + 2\,\mathrm{I}_n)$.
   c) Montrer que A est diagonalisable.