EML 2005

Voie S

Problème 1 (Enoncé)

On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = 2X \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

1. Calculer T_2 et T_3.
2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n et déterminer son coefficient dominant.

   b) Établir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polnôme pair (resp. impair).
3. Calculer, pour tout entier naturel n, $T_n(1)$ en fonction de n.
4. a) Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \,]0,\pi[\,,\ T_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $]-1,1[$, que l'on explicitera.

   c) Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(X - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right).$$

   d) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2\,(n+1)}\right)$.
5. a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \,]0,\pi[\,,\ \sin^2(\theta)\, T_n''(\cos(\theta)) - 3\cos(\theta)\, T_n'(\cos(\theta)) + \left(n^2+n\right) T_n(\cos(\theta)) = 0.$$

   Indication : on pourra dériver deux fois la fonction $\theta \mapsto \sin(\theta)\, T_n(\cos(\theta)) - \sin((n+1)\theta)$.

   b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (X^2-1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2+2n)T_n = 0.$$

6. On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère l'application L définie sur E par :

$$\forall P \in E,\ L(P) = (X^2-1)P'' + 3XP'.$$

   a) Montrer que L est un endomorphisme de E.

   b) Calculer $L(T_k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

   c) En déduire les valeurs propres de L et, pour chaque valeur propre de L, une base et la dimension du sous-espace propre associé.
7. On considère l'application ω définie sur $E \times E$ par :

$$\forall (P,Q) \in E \times E,\ \omega(P,Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t.$$

   a) Montrer que ω est un produit scalaire sur E.

b) Prouver que :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \omega(L(P),Q) = \omega(P, L(Q)).$$

Indication : on pourra procéder à une intégration par parties pour montrer que :

$$\omega(L(P),Q) = \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{d}t.$$

c) Prouver que $(T_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthogonale de E.