EDHEC

Filière ECS

(Problème)

On dispose de deux jetons équilibrés J_1 et J_2. Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1. Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1.
Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers indépendants de ce jeton. On note E l'événement « le jeton J_1 est choisi pour le jeu » et, pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement « le $k^{ème}$ lancer fait apparaître une face numérotée 1 ».

Partie 1 : étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.
   b) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois une face portant le numéro 1 au cours des n premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.
2. Dans la suite, on note X le rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 si cela arrive $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais. On note également Y le rang d'apparition de la première face portant le numéro 1 si cela arrive et $Y = 0$ si la face 1 n'apparaît jamais.
   On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (que l'on ne cherchera pas à déterminer) sur lequel X et Y sont des variables aléatoires réelles.
   a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n)$.
   b) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$. Ce résultat était-il prévisible ?
   c) Montrer que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X)$.
   d) Montrer que $X\,(X-1)$ admet une espérance, la calculer puis vérifier que : $\mathbb{V}(X) = 2$.
3. a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n)$.
   b) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(Y = 0)$.
   c) Montrer que Y a une espérance puis déterminer $\mathbb{E}(Y)$.
   d) Montrer que $Y\,(Y-1)$ admet une espérance, la calculer puis vérifier que : $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{5}{4}$.
4. On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ la variable aléatoire $S = \sup(X, Y)$ par :
   $$\forall\, \omega \in \Omega,\ \ S(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega))$$
   a) Déterminer $S(\Omega)$.
   b) Montrer que : $\mathbb{P}(S = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{1}{2}$.
   c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, comparer les événement $[X = n]$ et $[Y < n]$ d'une part, les événements $[Y = n]$ et $[X < n]$ d'autre part puis en déduire que :
   $$[S = n] = [X = n] \cup [Y = n]$$
   d) Reconnaître alors la loi de S et préciser son espérance et sa variance.

5. On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ la variable aléatoire $I = \inf(X, Y)$ par :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \ I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$$

   a) Montrer que I est une variable de Bernoulli.
   b) Calculer $\mathbb{P}(I = 0)$ puis donner la loi de I ainsi que son espérance et sa variance.

Partie 2 : simulation des variables X et Y

6. On considère le script suivant :

```
import numpy.random as rd
X=0
jeton=rd.randint(1,3)
if jeton==1:
    X=1
    while rd.randint(2)>0:
        X=X+1
print(X)
```

   a) Expliquer le fonctionnement de ce script et déterminer le contenu de la variable affichée à la fin.
   b) Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle `while` est fini ?

7. Écrire un script renvoyant la valeur de Y et n'utilisant pas de boucle `while`.

Diffusion et reproduction interdites