ECRICOME 2005

Voie S

Problème (Enoncé)

1. a) Déterminer pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $J_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^\alpha}$ converge.

   b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout réel α supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$, on a :
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{J_\alpha}{2\alpha}.$$

   c) En déduire que :
$$\forall \alpha > \frac{1}{2},\ J_{\alpha+1} = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} J_\alpha.$$

   d) Calculer J_1 puis, pour tout entier naturel n non nul, calculer J_n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction g_n sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

   Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel k_n tel que la fonction $f_n = \frac{1}{k_n} g_n$ soit une densité de probabilité. On exprimera k_n à l'aide de $J_{\frac{n+1}{2}}$.

3. Dans cette question, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant f_n pour densité. On dit que X suit la loi de Student à n degrés de liberté.

   a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $n > 1$ et la calculer dans ce cas.

   b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $n > 2$ et, dans ce cas, exprimer $\mathbb{V}(X)$ en fonction de k_n, n et $J_{\frac{n-1}{2}}$ puis vérifier que :
$$\mathbb{V}(X) = \frac{n}{n-2}.$$

   Lorsque $n = 1$, la loi de Student à 1 degré de liberté s'appelle aussi loi de Cauchy et une densité en est donc :
$$f_1 : t \mapsto \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+t^2}.$$

4. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un rayon lumineux part de l'origine O et frappe un écran représenté par la droite d'équation $x = 1$, en un point M. On suppose que θ, mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{OM})$, est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $\tan(\theta)$. En déduire que $\tan(\theta)$ est une variable aléatoire à densité, dont on explicitera une densité.

   b) Exprimer Y, variable aléatoire égale à l'ordonnée du point M, en fonction de θ. Reconnaître la loi de Y.

c) On considère le script Python suivant :

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
u=rd.random()
x=np.sin(np.pi*u-np.pi/2)/np.cos(np.pi*u-np.
    pi/2)
print(x)
```

Proposer une interprétation de ce script.

5. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   a) Soit Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de fonction de répartition F. On note G la fonction de répartition de la variable aléatoire $|Y|$.
      (i) On suppose, dans cette question, que Y est une variable aléatoire admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que Y et $-Y$ ont la même loi si et seulement si f est paire. On suppose cette condition vérifiée. Montrer alors que $|Y|$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité g en fonction de f.
      (ii) Réciproquement, on suppose dans cette question que $|Y|$ est une variable aléatoire de densité g et que Y et $-Y$ suivent la même loi.
      - Montrer que :
      $$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(Y = x) = 0$$
      puis exprimer $F(x)$ en fonction de $F(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
      - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $F(x)$ en fonction de G et de x (on pourra distinguer les cas selon le signe de x).
      - En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et exprimer une densité f de Y en fonction de g.
6. Soit c un réel strictement positif. À l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^{2t}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{e}^{-\frac{c\mathrm{e}^{2t}}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.
7. Soient X et X' deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et suivant la même loi normale centrée et réduite.
   a) Montrer que la variable aléatoire $Z = \ln|X|$ est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité. Donner également une densité de $-Z$.
   b) Montrer que la variable aléatoire $\ln\left|\dfrac{X}{X'}\right|$ admet pour densité la fonction h définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{2}{\pi} \times \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$
   c) Déterminer finalement une densité de $\left|\dfrac{X}{X'}\right|$ puis reconnaître la loi de $\dfrac{X}{X'}$.