



EML

Filière ECS

(Énoncé)

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls. On notera alors $M \geq 0$.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite strictement positive si et seulement si tous les coefficients de M sont strictement positifs. On notera alors $M > 0$.

Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $M \geq N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geq 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite productive si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes : M est positive et il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

Partie I - Étude d'exemples

1. En considérant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est productive.
2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.

Partie II - Caractérisation des matrices positives

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que, si M est positive, alors, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.
4. Réciproquement, montrer que, si, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

Partie III - Caractérisation des matrices productives

5. Soit A une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ème colonne est noté a_{ij} , et P une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $P - AP > 0$. On note p_1, \dots, p_n les coefficients de la matrice colonne P .

- a) Montrer que $P > 0$.

- b) Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geq AX$. On note x_1, \dots, x_n les coefficients de la matrice colonne X . On désigne par c le plus petit des réels $\frac{x_j}{p_j}$ lorsque l'entier j décrit l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et k un indice tel que $c = \frac{x_k}{p_k}$.

Établir que :

$$c \left(p_k - \sum_{j=1}^n a_{kj} p_j \right) \geq 0$$

En déduire que $c \geq 0$ et que X est positive.

- c) Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$. En remarquant que $-X \geq A(-X)$, montrer que X est nulle.

En déduire que $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- d) Montrer que, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1} X$ est positive (on pourra utiliser 5.b).

En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

6. Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. On note $V = (I_n - B)^{-1} U$, où U est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Montrer que $V - BV > 0$. Conclure.

7. Donner une caractérisation des matrices productives.

8. Application : Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$.

Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.