ESSEC

Filière ECS

(Énoncé)

Notations

- Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- On note U l'ensemble des éléments $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :
$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$$
On **admet** que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.
- On considère la fonction F qui à tout élément $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de U associe :
$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \ln(x_j - x_i).$$
- On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et on rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire si son coefficient dominant (c'est-à-dire le coefficient de son monôme de plus haut degré) est égal à 1.

Partie I - Étude du cas particuliers $n = 2$

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$. On a donc :
$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x < y\}$$
et :
$$\forall (x, y) \in U, \ \ F(x, y) = x^2 + y^2 - 2\ln(y - x).$$

1. a) Établir que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
   b) Soit $(x, y) \in U$. Prouver que les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(F)(x, y)$ de F en (x, y) sont toutes strictement positives.
2. a) Montrer que le gradient de F s'annule en un unique point $a = (a_1, a_2)$ de U, que l'on déterminera.
   b) Prouver que $F(a)$ est l'unique extremum local de F sur U et préciser sa nature et sa valeur.
3. Soit $h = (h_1, h_2)$ un élément de $\mathbb{R}^2$ tel que $a + h$ appartienne à U.
   a) Montrer que, pour tout t appartenant à $[0, 1]$, $a + th$ appartient à U.
   b) Justifier que la fonction $g : t \mapsto F(a + th)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et rappeler une expression de g' et de g'' à l'aide de $F, \nabla(F)$ et $\nabla^2(F)$.
   c) Prouver que :
$$g(1) = g(0) + g'(0) + \int_0^1 (1 - t)\, g''(t)\, \mathrm{d}t.$$
   d) En déduire que $F(a)$ est le minimum global de F sur U.

Partie II - Étude d'une famille d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note, sous réserve de convergence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x.$$

4. a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Donner une densité de X.
   b) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre n et exprimer $\mathbb{E}(X^n)$ en fonction de I_n.
   c) En déduire la valeur des intégrales I_0, I_1 et I_2.
   d) Compléter la commande `Python` suivant afin qu'elle renvoie une variable `X` contenant une simulation de 1000 variables aléatoires $X_1, \ldots, X_{1000}$ indépendantes et de même loi que X :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
X=rd.normal(.........)
```

   e) Si `n` désigne une variable contenant un entier naturel non nul entrée par l'utilisateur et `X` la variable créée à l'aide de l'instruction précédente, que renvoie l'instruction `E= np.mean(X**n)` ? Justifier la réponse.
   f) En déduire une instruction permettant de renvoyer une valeur approchée de l'intégrale I_n.
5. a) À l'aide d'une intégration par parties, établir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{n+1}{2} \, I_n.$$

   b) Compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle renvoie la valeur de l'intégrale I_n :

```
import numpy as np
def I(n):
    if n==0:
        return .........
    elif n==1:
        return .........
    else:
        return .........
```

   c) Que vaut l'intégrale I_n si n est impair ?
   d) Prouver que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} \, p!} \sqrt{\pi}.$$

Partie III - Étude d'un endomorphisme

Dans cette partie, on considère l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x],\ \Phi(P) = 2XP' - P''.$$

6. a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
   b) Écrire la matrice représentative M de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
7. a) Déterminer les valeurs propres de Φ et montrer que Φ est diagonalisable.
   b) Prouver que, pour tout entier p appartenant à $[\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme unitaire H_p appartenant à $\mathbb{R}_n[x]$ et vérifiant :

$$H_p'' - 2XH_p' + 2pH_p = 0.$$

8. a) Montrer que, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, le polynôme H_p est de degré p.
   b) Expliciter les polynômes H_0, H_1, H_2 et H_3.
   c) Déterminer le coefficient de X^{p-1} (si $1 \leqslant p \leqslant n$) et celui de X^{p-2} (si $2 \leqslant p \leqslant n$) dans l'expression du polynôme H_p.

Partie IV - Étude des polynômes $H_0, H_1, \ldots, H_n$

9. a) Prouver que, pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[x]$, l'intégrale $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Dans la suite, cette intégrale est notée $\langle P, Q\rangle$.
   b) Prouver que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
10. a) En appliquant la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille $(1, X, X^2)$, déterminer une base orthonormale (G_0, G_1, G_2) de $\mathbb{R}_2[x]$.
    b) Calculer la norme des polynômes H_0, H_1 et H_2. Que constate-t-on ?
11. a) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto P'(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ puis prouver que :
$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[x])^2,\ \langle \Phi(P), Q\rangle = \left\langle P', Q'\right\rangle = \langle P, \Phi(Q)\rangle \qquad (1)$$
    b) En déduire que $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$ pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
    c) Démontrer que :
$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ \forall Q \in \mathbb{R}_{p-1}[x],\ \langle H_p, Q\rangle = 0.$$
12. Dans cette question, p désigne un entier appartenant à $[\![1, n]\!]$.
    a) En remarquant que $\langle H_p, H_0\rangle = 0$, prouver que le polynôme H_p s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ en changeant de signe. On note alors m le nombre de racines réelles de H_p en lesquelles H_p change de signe et on note $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ces racines et on note :
$$P_m(X) = \prod_{k=1}^{m} (X - a_k) = (X - a_1)(X - a_2)\cdots(X - a_m).$$
    b) On suppose que m est strictement inférieur à p. En remarquant que $\langle H_p, P_m\rangle = 0$, établir une contradiction.
    c) Prouver finalement que H_p admet exactement p racines, toutes réelles et simples.
13. Soit p un entier appartenant à $[\![1, n]\!]$. On note D_p la droite vectorielle de $\mathbb{R}_p[x]$ orthogonale à $\mathbb{R}_{p-1}[x]$.
    a) Justifier que :
$$D_p = \mathrm{Vect}(H_p).$$
    b) En déduire que $X^p - H_p$ est le projeté orthogonal de X^p sur $\mathbb{R}_{p-1}[x]$.
    c) En remarquant que $(H_0, H_1, \ldots, H_{p-1})$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_{p-1}[x]$, prouver alors que :
$$H_p = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\langle X^p, H_k\rangle}{\|H_k\|^2}\, H_k.$$
14. Soit p un entier appartenant à $[\![2, n]\!]$.
    a) On suppose que p est supérieur ou égal à 3. Prouver que :
$$\forall Q \in \mathbb{R}_{p-3}[x],\ \langle XH_{p-1}, Q\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle H_p - XH_{p-1}, Q\rangle = 0.$$
    b) Exprimer le polynôme $H_p - XH_{p-1}$ dans la base $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ puis en déduire :
$$2H_p - 2XH_{p-1} + (p-1)H_{p-2} = 0. \qquad (2)$$

c) En déduire que :

$$\forall p \in [\![0,n]\!]\,,\ H_p(0) = (-1)^{\lfloor p/2 \rfloor}\,\frac{I_p}{\sqrt{\pi}}.$$

15. a) Soit $p \in [\![2,n]\!]$. Prouver que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{p-2}[x],\ \left\langle H_p', Q\right\rangle = 0.$$

b) En déduire que, pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$H_p' = pH_{p-1}. \tag{3}$$

16. En langage `Python`, un polynôme P de degré inférieur ou égal à n peut être représenté par un vecteur ligne `P` de longueur $n+1$ tel que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, `P(k)` soit le coefficient du monôme de degré k de P. Par exemple, le vecteur `[1,2,0,-3]` représente le polynôme $1+2X-3X^3$.

On rappelle que la commande `np.size(X)` permet de renvoyer le nombre de coefficients d'un vecteur `X`. Par exemple, si `X=[-1,1,0,7]`, alors l'instruction `np.size(X)` renvoie la valeur 4.

On précise enfin que, dans la bibliothèque `numpy`, on dispose d'une fonction permettant de concaténer deux tableaux. Ainsi, si `x` et `y` sont des variables contenant des vecteurs unidimensionnels $(x_1,\ldots,x_p)$ et $(y_1,\ldots,y_q)$, la commande `np.concatenate((x,y))` renvoie le vecteur obtenu par concaténation de `x` et `y`, c'est-à-dire le vecteur $(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)$.

a) On suppose que les coefficients de la variable `A` sont $a_0,a_1,\ldots,a_{r-1}$, c'est-à-dire que :

$$A = \sum_{k=0}^{r-1} a_k X^k$$

Que contient la variable `Q` après l'exécution de la commande suivante ?

```
Q=np.concatenate(([0],A/np.arange(1,r+1)))
```

b) En utilisant la fonction `I` de la question 5, compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle renvoie les coefficients du polynôme H_n :

```
import numpy as np
def H(n):
    A=np.array([1])
    for k in range(1,n+1):
        r=np.size(A)
        A=k*np.concatenate(([0],A/np.arange(1,r+1)))
        A[0]=...............
    return A
```

Partie V - Recherche des extremums de F

17. Soit $a=(a_1,\ldots,a_n)$ un élément de U. On définit le polynôme P_a par :

$$P_a(X) = \prod_{k=1}^{n}(X-a_k) = (X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n).$$

a) Prouver que, pour tout réel x distinct de $a_1,a_2,\ldots,a_n$, on a :

$$\frac{P_a'(x)}{P_a(x)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x-a_j}.$$

En déduire, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la limite de $\dfrac{P_a'(x)}{P_a(x)} - \dfrac{1}{x-a_i}$ lorsque x tend vers a_i.

b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :

$$f : t \mapsto t\,P_a'(a_i + t) - P_a(a_i + t) \quad \text{et} \quad g : t \mapsto t\,P_a(a_i + t).$$

c) En déduire que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{P_a''(a_i)}{2P_a'(a_i)}.$$

18. a) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et déterminer ses dérivées partielles d'ordre 1.

b) Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un élément de U. On suppose que a est un point critique de F.

(i) Prouver que $2XP_a' - P_a''$ admet pour racines $a_1, \ldots, a_n$.

(ii) En déduire qu'il existe un réel λ tel que :

$$2XP_a' - P_a'' = \lambda P_a.$$

(iii) Comparer P_a et H_n.

c) Prouver que F admet un unique point critique a sur U.

19. a) Montrer que, si x et y appartiennent à U, alors $tx + (1-t)\,y$ appartient aussi à U pour tout $t \in [0, 1]$.

b) On dit qu'une fonction f définie sur U est convexe si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in U^2,\ \forall t \in [0, 1],\ f(tx + (1-t)\,y) \leqslant t f(x) + (1-t)\,f(y).$$

(i) Montrer que la fonction $z \mapsto z^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

(ii) En déduire que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la fonction $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i^2$ est convexe sur U.

(iii) Montrer que la fonction $z \mapsto -\ln(z)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

(iv) En déduire que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$, la fonction $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto -\ln(x_j - x_i)$ est convexe sur U.

(v) Établir finalement que F est convexe sur U.

c) On désigne par a le point critique de F et x un élément de U. On pose alors :

$$\forall t \in [0, 1],\ \psi(t) = F(tx + (1-t)\,a) = F(a + t\,(x - a)).$$

(i) Justifier que $\psi'(0) = 0$.

(ii) Établir :

$$\forall t \in \,]0, 1]\,,\ \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \leqslant F(x) - F(a).$$

(iii) En déduire que $F(a)$ est le minimum global de F sur U.

20. On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $y_1^{(k)}, \ldots, y_k^k$ les racines de H_k.

a) En utilisant (**??**), établir les relations suivantes :

$$\left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i^{(n-1)})\right| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \left|\prod_{i=1}^{n-2} H_{n-1}(y_i^{(n-2)})\right|$$

et :

$$\left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i^{(n-1)})\right| = \frac{1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times \cdots \times (n-1)^{n-1}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

b) Prouver que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \left|H_n'(a_i)\right| = \left|\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} (a_j - a_i)\right|$$

et évaluer $p_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$ en fonction de $\prod_{i=1}^{n} H_n'(a_i)$.

c) En utilisant (**??**), prouver que :

$$p_n^2 = n^n \left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i^{(n-1)})\right|.$$

d) En déduire une expression de p_n en fonction de n.

e) Exprimer les coefficients des monômes de degrés $n-1$ et $n-2$ de H_n en fonction de $a_1, \ldots, a_n$ puis en déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i, \quad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i^2.$$

f) En déduire finalement la valeur du minimum $F(a)$ de F sur U.