ECRICOME

Filière ECE

(Énoncé)

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x)$$

A. Étude des fonctions f_n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

1. Étudier le sens de variation des fonctions h_n.
2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.
3. Étude du cas particulier $n = 1$.
   a) Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1,+\infty\,[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
   b) En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1,+\infty[$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
   a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1,+\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
   b) En déduire les variations de f_n sur $]-1,+\infty[$ (on distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes sans étudier les branches infinies.

B. Étude d'une suite

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

5. Calcul de U_1.
   a) Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que :
   $$\forall x \in [0,1],\ \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{1+x}$$
   b) En déduire la valeur de l'intégrale :
   $$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$$
   c) Montrer que $U_1 = \dfrac{1}{4}$.
6. Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   a) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
   b) Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (on ne demande pas sa limite).

c) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}$$

d) En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

7. Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$.

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

a) Montrer que :

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

c) En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n, montrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln(2) - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$$