ECRICOME

Filière ECS

(Énoncé)

Dans tout le problème, n est un entier positif ou nul, a un entier pair supérieur ou égal à 4 et p un réel tel que $0 < p < 1$. Pour simplifier les écritures, on pose $a_n = 2^{n-1}a$.

Un joueur dispose initialement d'une fortune a et joue à un jeu consistant en une succession de jets d'une pièce donnant pile avec la probabilité p. Avant chaque lancer, le joueur mise une partie de sa fortune sur pile et l'autre partie sur face.

On note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé permettant de modéliser cette expérience et on note F_n la variable aléatoire égale à la fortune du joueur à l'issue du $n^{ème}$ lancer.

F_0 est donc la variable aléatoire certaine égale à a et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fortune du joueur évolue de la façon suivante à l'issue du $(n+1)^{ème}$ lancer :

- avant le $(n+1)^{ème}$ lancer, le joueur mise une partie X_n de sa fortune sur pile et l'autre partie, $F_n - X_n$, sur face,
- si le $(n+1)^{ème}$ lancer donne pile, la fortune F_{n+1} est égale à $2X_n$, s'il fait apparaître face, la fortune F_{n+1} est égale à $2(F_n - X_n)$.

Ainsi, à tout instant, la fortune du joueur est un entier pair, éventuellement nul. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n et X_n sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on suppose que X_n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et on admet que (X_n, F_n) est indépendante du résultat du $(n+1)^{ème}$ lancer.

Résultats préliminaires

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que F_n prend ses valeurs dans $\{0, 2, 4, \ldots, 2a_n\}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynôme G_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \sum_{k=0}^{a_n} \mathbb{P}(F_n = 2k)\, x^k.$$

2. a) Calculer $G_n(1)$.

   b) Que représente concrètement $G_n(0)$? Montrer, à l'aide d'un argument probabiliste, que la suite de terme général $G_n(0)$ est croissante et convergente.

   c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ G_n'(1) = \frac{\mathbb{E}(F_n)}{2}.$$

   Établir de même que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{V}(F_n) = 4\,G_n''(1) + 2\,\mathbb{E}(F_n) - [\mathbb{E}(F_n)]^2.$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme G_n est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

Partie 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, a_n]\!]$. On suppose dans cette partie que, si $\mathbb{P}(F_n = 2k)$ n'est pas nul, la loi conditionnelle de X_n sachant $[F_n = 2k]$ est une loi uniforme sur $[\![0, 2k]\!]$.

4. Établir, pour tout entier $j \in [\![0, 2k]\!]$, l'égalité :

$$\mathbb{P}([F_{n+1} = 2j] \cap [F_n = 2k]) = \frac{1}{2k+1}\,\mathbb{P}(F_n = 2k).$$

   (On pourra utiliser le système complet d'événements constitué par les deux résultats possibles du lancer $n+1$).

5. En déduire, pour tout entier $j \in [\![0, a_{n+1}]\!]$, une expression sommatoire de $\mathbb{P}(F_{n+1} = 2j)$.

6. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1[\,,\ G_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{x^{2k+1} - 1}{(2k+1)(x-1)}\,\mathbb{P}(F_n = 2k).$$

7. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (1-x)\,G_{n+1}(x) = \int_x^1 G_n(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

8. Prouver, en dérivant deux fois cette égalité, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{E}(F_n) = a$.

Partie 2

On suppose maintenant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in [\![0, a_n]\!]$ tel que $\mathbb{P}(F_n = 2k)$ ne soit pas nul, la loi conditionnelle de la variable aléatoire X_n sachant $[F_n = 2k]$ est une loi binomiale de paramètres $2k$ et r, r étant un réel de $]0, 1[$.

9. Compléter le script `Python` suivant pour qu'il simule l'expérience et affiche les fortunes successives $F_1, \ldots, F_n$ du joueur à l'issue des n premières épreuves, les entiers n, p, r, a étant entrés par l'utilisateur :

```
n=input('n=')
p=input('p=')
r=input('r=')
a=input('a=')
F=a
for i=1:n
    X=.........
    if rand()<p then F=........
                else F=........
    end
    ........
end
```

10. Dans la suite de l'exercice, on pose :

$$A = pr^2 + (1-p)(1-r)^2 \quad \text{et} \quad B = 2\,[pr + (1-p)(1-r)]\,.$$

   Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel n, on a :

$$G_{n+1}(x) = p\,G_n\big((xr + 1 - r)^2\big) + (1-p)\,G_n\big((x - xr + r)^2\big)\,. \tag{2}$$

www.stephanepreteseille.com
Diffusion et reproduction interdites

11. Dans cette question uniquement, on suppose que : $p = \dfrac{1}{2}$.

    On considère le trinôme $Q(X) = AX^2 + 2r\,(1-r)\,X + A$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la condition initiale $u_0 = 0$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = Q(u_n).$$
    a) Montrer, pour tout réel x, l'égalité : $Q(x) = x + A(x-1)^2$.

    b) Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par Q.

    c) Montrer que la suite u est croissante et convergente. Donner la valeur de sa limite.

    d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer, en utilisant (2) et la convexité de G_n sur $\mathbb{R}^+$, que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ G_{n+1}(x) \geqslant G_n(Q(x)).$$
    e) Établir :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ G_{n+1}(0) \geqslant G_1(u_n).$$
    f) Conclure.

12. On revient au cas général où p est quelconque.

    a) Montrer à l'aide de (2), que la suite $(\mathbb{E}(F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison B.

    b) En posant $p' = \dfrac{1}{2} - p$ et $r' = \dfrac{1}{2} - r$, étudier la limite de cette suite suivant les valeurs de p et r.

    c) Montrer que si $(\mathbb{E}(F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(\mathbb{P}(F_n = 0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

www.stephanepreteseille.com
Diffusion et reproduction interdites