EML

Filière ECS

(Énoncé)

Partie I

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme P_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} (1-x^2)^k x^{n-2k}$$

c'est-à-dire, si l'on note $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ la partie entière de $\frac{n}{2}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} (1-x^2)^k x^{n-2k}$$

1. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 2x$, $P_2(x) = 4x^2 - 1$.
   Expliciter le polynôme P_3.
2. Étudier la parité du polynôme P_n suivant la parité de l'entier naturel n.
3. On admet que, pour tout entier naturel n et pour tout réel t :

   $$\sin((n+1)\,t) = \sin(t)\, P_n(\cos(t))$$

   Démontrer que, pour tout entier naturel n, le polynôme P_n vérifie la relation :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(n^2 + 2n\right) P_n(x) - 3x P_n'(x) - \left(x^2 - 1\right) P_n''(x) = 0$$

   On pourra dériver deux fois la relation admise.
4. a) Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout réel t :

   $$\sin((n+2)\,t) + \sin(nt) = 2\cos(t)\sin((n+1)\,t)$$

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) - 2x P_n(x) + P_{n-1}(x) = 0$$

   c) Montrer, en utilisant la relation précédente, que P_n est un polynôme de degré n et déterminer le coefficient dominant a_n de P_n.

Partie II

Dans cette partie, n désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B}_0 = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E.
Soit Φ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(P)(x) = 3x P'(x) + \left(x^2 - 1\right) P''(x)$$

5. Vérifier que Φ est un endomorphisme de E.
6. a) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer $\Phi(e_k)$.
   b) Déterminer une base de l'image de Φ.
   c) Déterminer une base du noyau de Φ.
7. On considère les polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_n$ définis dans la première partie.
   a) Vérifier que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E.
   b) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer $\Phi(P_k)$ (on pourra utiliser le résultat de la question 3 de la première partie).
   c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ.
   d) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer l'ensemble S_k des polynômes P de E tels que $\Phi(P) = P_k$.