EML

Filière ECE

(Énoncé)

On considère les matrices carrées réelles d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et exprimer J comme combinaison linéaire de I et A^2.
2. a) Calculer les valeurs propres de A (les calculs devront figurer sur la copie) ; on trouvera trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que l'on rangera de sorte que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

   b) Pour chaque entier k de $\{1, 2, 3\}$, calculer un vecteur propre X_k associé à la valeur propre λ_k de A, tel que l'élément de la première ligne de X_k soit égal à 1.

   c) En déduire une matrice carrée réelle P d'ordre 3, inversible, de première ligne égale à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, telle qu'en notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ on ait $A = PDP^{-1}$.
3. Soient a, b, c des réels et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

   a) Exprimer M comme combinaison linéaire de I, A, J, puis comme combinaison linéaire de I, A, A^2.

   b) En déduire une matrice diagonale réelle Δ d'ordre 3 telle que $M = P\Delta P^{-1}$, où P est la matrice obtenue à la question 2c.